

Ставропольский край
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2017/2018 учебного года

Математика

9 класс

1. Про числа x и y известно, что $x=y+1$. Может ли оказаться так, что $x^4=y^4$?

Решение

Пусть $x=1/2$, $y=-1/2$, тогда $x^4=y^4=\frac{1}{16}$. Можно доказать, что этот пример – единственный (от учащихся это не требуется). Действительно, $x^4=y^4 \Leftrightarrow |x|=|y|$. Случай $x=y$ невозможен, случай $x=-y$ даёт указанный пример.

Ответ да, может.

2. В 8 "Я" классе достаточно двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что или Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, или его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет 24% двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25%. Какой процент двоечников в 8 "Я" сейчас?

Решение

Пусть сейчас в классе n учеников. По условию $0,24n = 0,25(n - 1)$, то есть $0,01n = 0,25$. Значит, $n = 25$. Один человек составляет 4% от 25, поэтому сейчас в классе $24 + 4 = 28\%$ двоечников.

Ответ 28%.

3. Шестнадцать хоккейных команд из шестнадцати стран провели турнир – каждая команда сыграла с каждой из остальных по одному матчу. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех странах, кроме своей родины?

Решение

Предположим, что такое возможно. Поскольку каждая команда провела 15 матчей и играла в каждой стране, кроме своей, то в каждой чужой стране она провела ровно по одной игре. Тогда в каждой стране побывало по одному

разу ровно 15 команд. Но в каждом матче участвуют две команды, поэтому количество команд, сыгравших в каждой стране, должно быть чётным. Противоречие.

Ответ не могло.

4. В таблицу 4×4 записали натуральные числа. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в каждой следующей строке на 2 больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце на 3 больше, чем в предыдущем?

Решение

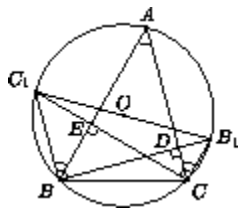
Предположим, что такое возможно. Пусть сумма чисел в первой строке равна a , а сумма чисел в первом столбце равна b . Тогда сумма всех чисел в таблице равна $a + (a + 2) + (a + 4) + (a + 6) = 4a + 12$, то есть кратна 4. С другой стороны, она же равна $b + (b + 3) + (b + 6) + (b + 9) = 4b + 18$, то есть не кратна 4. Противоречие.

Ответ не могло.

5. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из точек B и C , продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1 . Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC .

Решение

Так как B_1C_1 – диаметр окружности, то $\angle B_1BC_1 = \angle B_1CC_1 = 90^\circ$, следовательно, $BC_1 \parallel AC$ и $CB_1 \parallel AB$ (см. рис.). Так как $BC_1 \parallel AC$, то $\angle C_1BA = \angle A = \alpha$. Аналогично, $\angle B_1CA = \angle A = \alpha$. Градусная мера дуги B_1C_1 равна 180° , поэтому сумма вписанных углов C_1BA и B_1CA равна 90° , то есть $\angle A = 45^\circ$.



Ответ 45° .

Замечания Ответ можно также получить, доказав, что треугольник CDB_1 – равнобедренный прямоугольный.